1 Corrigé du contrôle de mathématiques

Avertissement. *remarque d'un collègue... à méditer*
Comme certaines remarques en cours et sur les corrections des devoirs n'ont pas les effets escomptés, sur les prochains devoirs, des pénalités seront appliquées à
- toute copie qui démontrera une égalité en commençant par l'affirmer ou en écrivant le symbole « $\Leftrightarrow$ » à la place du simple symbole « $=$ » (question **IV-1.** par exemple) ;
- toute question traitée sans aucune phrase ni d'introduction ni de conclusion ou de présentation du résultat.

I- **1.** Les affichages, tests et affectations sont les suivantes :

```
6     AFFICHAGE : "Saisir la valeur de x"
7      x=-3
8     y=3*(-3)-2=-11
9     on a y=-11<0 donc
11      z=y=-11
17    AFFICHAGE : "Pour x="
18    AFFICHAGE : -3
19    AFFICHAGE : " on a z="
20    AFFICHAGE : -11
```

2 pts

2. Cet algorithme lit une valeur et si son triple plus 2 est négatif alors elle affiche ce résultat sinon elle affiche son opposé donc l'objectif de cet algorithme est de lire une valeur x puis de calculer et afficher son image par la fonction $x \mapsto -|3x-2|$. 1 pt

3. Si on remplace la ligne 9 par la ligne proposée, l'exécution de l'algorithme ne sera différente que dans le cas $y=0$ c'est-à-dire $3x-2=0$ soit $x=\dfrac{2}{3}$, alors pour cette valeur le test de la ligne 9 sera positif (affirmatif) au lieu d'être négatif et la ligne 15 sera exécutée au lieu de la ligne 11, donc on aura $z=0$ au lieu de $z=-0$, ce qui revient au même. Ainsi l'algorithme altéré produira exactement les mêmes informations que l'initial. 1 pt

II- **1.** On a
$$\sqrt{2x-1}=5 \Leftrightarrow 2x-1=5^2, \quad \Leftrightarrow 2x=26, \quad \Leftrightarrow x=13, \quad \Leftrightarrow x=13,$$
donc l'unique solution de cette équation est 13. 1 pt

2. Une telle inéquation peut se résoudre en étudiant comme vu en cours les deux cas du signe de $3x+4$... mais pour changer, une autre rédaction est proposée ici.

On sait que $\begin{cases} |3x+4| = 3x+4 & \text{si } 3x+4 \geqslant 0 \\ |3x+4| = -3x-4 & \text{si } 3x+4 \leqslant 0 \end{cases}$, donc on a

$$\begin{aligned}
& |3x+4| < 1 \\
\Leftrightarrow\ & (3x+4<1 \text{ et } 3x+4 \geqslant 0) \text{ ou } (-3x-4<1 \text{ et } 3x+4 \leqslant 0), \\
\Leftrightarrow\ & (3x<-3 \text{ et } 3x \geqslant -4) \text{ ou } (-3x<5 \text{ et } 3x \leqslant -4), \\
\Leftrightarrow\ & \left(x<-1 \text{ et } x \geqslant -\frac{4}{3}\right) \text{ ou } \left(x>-\frac{5}{3} \text{ et } x \leqslant -\frac{4}{3}\right), \\
\Leftrightarrow\ & \left(x \in \left[-\frac{4}{3};-1\right[\right) \text{ ou } \left(x \in \left]-\frac{5}{3};-\frac{4}{3}\right]\right), \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left[-\frac{4}{3};-1\right[\cup \left]-\frac{5}{3};-\frac{4}{3}\right], \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left]-\frac{5}{3};-1\right[,
\end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left]-\dfrac{5}{3};-1\right[$. 3 pts

III- (Ceci est une question de cours qui dans l'esprit du bac aurait pu faire l'objet d'une ROC - restitution organisée de connaissance -).

Pour tout $x \in [0;2]$ on a
$$\begin{aligned}
f(x) \leqslant g(x) &\Leftrightarrow f(x)-g(x) \leqslant 0, \\
&\Leftrightarrow x-x^2 \leqslant 0, \\
&\Leftrightarrow x(1-x) \leqslant 0, \\
&\Leftrightarrow -1 \times x(x-1) \leqslant 0,
\end{aligned}$$
or ce trinôme est du signe contraire de -1 donc positif entre ses racines 0 et 1, donc sur l'intervalle $[0;1]$ qui est bien compris dans l'intervalle $[0;2]$, et négatif sur le complément $[1;2]$.

Ainsi on a $f \geqslant g$ sur $[0;1]$ et $f \leqslant g$ sur $[1;2]$. 3 pts

IV- **1.** D'une part on a
$$4+\frac{7}{x-2} = \frac{4x-8}{x-2}+\frac{7}{x-2} = \frac{4x-1}{x-2},$$
et d'autre part on a
$$1+\frac{3x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2}+\frac{3x+1}{x-2} = \frac{4x-1}{x-2},$$
ainsi, les trois expressions sont égales. 2 pts

2. (Cet exercice a été traité en cours, la justification du choix de l'expression pour chaque question était requise).

a) La forme ② apparait comme une fonction associée à une fonction affine : on prend l'inverse d'une fonction affine puis on la multiplie par une constante (positive) puis on lui additionne une autre constante ; ainsi cette forme semble avantageuse pour étudier les variations de la fonction h. C2 : 1 pt

En effet, la fonction $x \mapsto x-2$ est une fonction affine de coefficient directeur 1 strictement positif donc elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$; ajoutons que cette fonction ne s'annule qu'en 2 donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$.

De plus cette fonction a les mêmes variations que la fonction $x \mapsto \dfrac{7}{x-2}$ (multiplication par une constante strictement positive).

Enfin, cette dernière fonction a les mêmes variations que la fonction $x \mapsto 4+\dfrac{7}{x-2}$ (addition d'une constante).

Ainsi la fonction h est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$.

(Attention, ne pas en conclure que h est strictement décroissante sur $\mathbf{R}\setminus\{2\}$). 3 pts

b) On sait déterminer pour quelles valeurs une quantité s'annule lorsque cette quantité est exprimée sous forme d'un produit ou d'un quotient, donc ici la forme ① de la fonction h parait la plus avantageuse pour résoudre l'équation $h(x)=0$. C2 : 1 pt

En effet, ce quotient s'annule pour une valeur de x si et seulement si son dénominateur $4x-1$ s'annule (bien sûr dans le domaine où le dénominateur ne s'annule pas...), donc l'unique solution de l'équation $h(x)=0$ est $\dfrac{1}{4}$. 1,5 pt

c) On sait déterminer le signe d'une quantité lorsque cette quantité est exprimée sous forme d'un produit ou d'un quotient, or l'inégalité $h(x)<1$ est équivalente à l'inégalité $h(x)-1<0$ et si l'on soustrait 1 à la forme ③ de la fonction h on obtient un quotient donc cette forme semble permettre de résoudre l'inéquation $h(x)<1$. C2 : 1 pt

En effet on a
$$\begin{aligned} h(x)<1 &\Leftrightarrow h(x)-1<0,\\ &\Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-2}<0,\\ &\Leftrightarrow \frac{x+\frac{1}{3}}{x-2}<0, \end{aligned}$$
et un tableau de signe de cette dernière expression (l'établir !) permet de conclure que $h(x)-1$ est négatif entre $-\dfrac{1}{3}$ et 2 : l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x)<1$ est donc l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3};2\right[$.

2 pts

Total : 22,5 pts

« Ce ne sont pas les signes, les symboles, qui constituent la science, le seul principe qui y domine, c'est l'esprit de sagacité auquel les objets soumis servent d'auxiliaire ». Bhaskara (algébriste indien, 1114-1185, dont l'œuvre marque l'apogée des mathématiques indiennes et a inspiré nombre de mathématiciens arabes et occidentaux) (c'était donc un mathématicien de valeur puisqu'indien vaut mieux que deux tu l'auras) . *On remarquera le sens de l'humour développé de mon collègue.*